

намики//Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. – 1995 – Вып. 1–2. – С. 72–79.

2. Иванов М.Я., Крупа В.Г. *Неявный нефакторизованный метод расчета турбулентных течений вязкого теплопроводного газа в решетках турбомашин* // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1991 – Т. 31. – N 5. – С. 754–766.

3. Shakib F., Hughes T.J.R., Johan Z. *A multi-element group preconditioned GMRES algorithm for nonsymmetric systems arising in finite element analysis* // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1989. – V. 75. – P. 415–456.

## ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА КРИВОЛИНЕЙНЫМ КАТОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЫХОДА ПО ТОКУ

Е. Р. Газизов

*НИИММ Казанского государственного университета*

**1. Постановка задачи и сведение ее к решению нелинейного интегрального уравнения.** Требуется определить форму анодной границы  $\Gamma_0$  при стационарном электрохимическом формообразовании криволинейным катодом-инструментом  $\Gamma_1$ , граница которого задана в виде функции от  $s$

$$\theta = F(s), \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол наклона к оси  $x$  касательной к  $\Gamma_1$ ,  $s$  – длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки на  $\Gamma_1$ ,  $F(s)$  – произвольно задаваемая гладкая функция. На  $\Gamma_0$  выполняется условие

$$\lambda(V)V = \cos \theta, \quad (2)$$

где  $V$  – скорость (безразмерная плотность тока, отнесенная к плотности тока в торцевом зазоре),  $\lambda(V)$  – заданная функция (коэффициент выхода по току,  $V_{кр} \leq V \leq 1$ ,  $V_{кр} \geq 0$ ),  $\theta$  – угол наклона к оси  $x$  касательной к  $\Gamma_0$ . Ось  $Ox$  направлена перпендикулярно направлению подачи катода-инструмента (рис. 1). Задан расход жидкости  $Q$  (торцевой зазор).

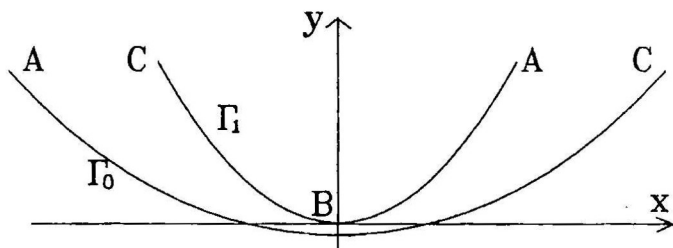


Рис. 1. Физическая область течения

Для решения задачи отобразим область течения в физической плоскости на полосу  $D_t = \{0 < \eta < \pi/2\}$  в плоскости комплексного переменного  $t = \xi + i\eta$  так, чтобы бесконечно удаленные точки канала  $A$  и  $C$  перешли в бесконечно удаленные точки полосы слева и справа соответственно, а точка  $B$  перешла в точку  $t = i\pi/2$ .

Введем аналитическую функцию

$$\chi(t) = \ln \frac{dz}{dW} = \ln(1/V) + i\theta = r + i\theta$$

и обозначения

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \chi(t) = r^0(\xi), & \operatorname{Im} \chi(t) = \theta^0(\xi), & t = \xi, & -\infty < \xi < \infty, \\ \operatorname{Re} \chi(t) = r^1(\xi), & \operatorname{Im} \chi(t) = \theta^1(\xi), & t = \xi + i\pi/2, & -\infty < \xi < \infty. \end{cases}$$

Если функция  $\chi(t)$  найдена, то искомое конформное отображение  $z(t)$  определяется интегралом

$$z(t) = \frac{2Q}{\pi} \int_0^t e^{\chi(t)} dt, \quad (3)$$

а форма анодной границы  $\Gamma_0$  отыскивается в параметрическом виде по следующим формулам

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{2Q}{\pi} \int_0^\xi e^{r^0(\xi)} \cos \theta^0(\xi) d\xi, \\ y(\xi) &= \frac{2Q}{\pi} \int_0^\xi e^{r^0(\xi)} \sin \theta^0(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Поставим краевую задачу для определения функции  $\chi(t)$ . На поверхности катода-инструмента (при  $\eta = \pi/2$ ) функция  $\chi(t)$  удовлетворяет условию

$$\theta^1(\xi) = F(s). \quad (4)$$

На свободной поверхности при  $\eta = 0$  должно выполняться соотношение (2). Учитывая равенство  $dW/dz = \frac{dW/dt}{dz/dt}$ , с помощью формул (2), (3) найдем, что

$$V(\xi) = \left| \frac{dW}{dz} \right|_{t=\xi} = e^{-r^0(\xi)}. \quad (5)$$

Теперь, скомбинировав (2) и (5), получим краевое условие, которому удовлетворяет функция  $\chi(t)$  на нижней границе полосы  $D_t$

$$\lambda(e^{-r^0(\xi)})e^{-r^0(\xi)} = \cos \theta^0(\xi). \quad (6)$$

Соотношения (4), (6) определяют нелинейную краевую задачу для аналитической функции  $\chi(t)$  в полосе  $D_t$ . Сведем эту задачу к нелинейному интегральному уравнению.

Используем решение смешанной краевой задачи для аналитической в области  $D_t$  функции  $\chi(t)$  по заданной действительной части на нижней границе полосы и мнимой — на верхней (см., напр., [1]):

$$\chi(t) = \frac{i}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta^1(\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(\xi - t)} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^0(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - t)} \right). \quad (9)$$

Разделив действительную и мнимую части в этом выражении при  $t = u$ , получим

$$\theta^0 = A\theta^1 - B r^0, \quad (7)$$

где функционал

$$Ag = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) d\xi,$$

а линейный сингулярный оператор (интеграл понимается в смысле главного значения)

$$Bf = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - u)} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{u-\varepsilon} \frac{f(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - u)} + \int_{u+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\operatorname{sh}(\xi - u)} \right].$$

Разделив действительную и мнимую части в этом выражении при  $t = u + i\pi/2$ , получим еще одно операторное соотношение

$$\tau^1 = -B\theta^1 + Ar^0. \quad (8)$$

Таким образом, определена связь между функциями  $r^0(\xi)$ ,  $\theta^0(\xi)$ ,  $r^1(\xi)$ ,  $\theta^1(\xi)$ . Осталось найти выражение, связывающее длину дуги  $s$  и функцию  $r^1$  на  $\Gamma_1$ . Известна связь между  $t$  и  $W$ :  $t = \pi W/2Q$  или  $\xi + i\eta = \pi(\varphi + i\psi)/2Q$ , следовательно,  $\varphi = 2Q\xi/\pi$ . Кривая  $\Gamma_1$  есть линия тока и на ней  $d\varphi = Vds$ . Теперь, зная, что  $d\varphi = 2Qd\xi/\pi$ , а  $V = \exp(-r^1)$ , записываем искомую формулу в операторном виде

$$s = \frac{2Q}{\pi} C(\exp(-B\theta^1 + Ar^0)), \quad (9)$$

где  $C$  — линейный оператор,

$$C\lambda = \int_0^\xi \lambda(\xi) d\xi.$$

Подставив (9) в (1), а (7), (8) в (2), получим систему нелинейных интегральных уравнений

$$\begin{cases} \theta^1 = F \left[ \frac{2Q}{\pi} C(\exp(-B\theta^1 + Ar^0)) \right], \\ \lambda(e^{-r^0})e^{-r^0} = \cos(A\theta^1 - Br^0). \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) представляет собой замкнутую систему уравнений для определения  $r^0(\xi)$  и  $\theta^1(\xi)$  и после дискретизации решается методом Ньютона.

Предложенный алгоритм реализован в виде программы на языке Фортран-77.

**2. Числовые расчеты.** Катод-инструмент задается формулой  $y = x^2$ . Результат численного решения для  $\lambda(V) = 1$  представлен на рис. 2 сплошной линией. Пунктиром нанесена форма детали, полученная с учетом пассивирующих свойств электролита, при этом используется зависимость выхода по току для пассивирующих электролитов, представленная в работе [2],  $\lambda = ((I - I_{kp})\lambda_{\max})/I$ ,  $I \geq I_{kp}$  со следующими значениями параметров:  $\alpha = 0.1 \text{ ом}^{-1}\text{см}^{-1}$  (электропроводность среды),  $\Delta u = 12\text{в}$

(разность потенциалов),  $Q = 0.04$  см (торцевой зазор),  $\lambda_{\max} = 2/3$  (максимальный выход по току),  $I_{kp} = 5 \text{ асм}^{-2}$  (критическая плотность тока, при которой прекращается электрохимическая обработка).

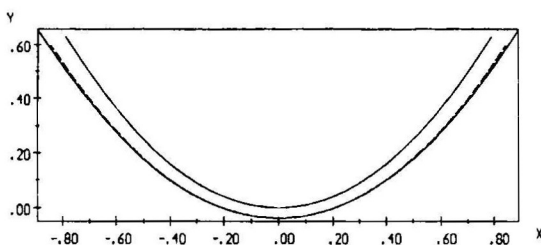


Рис. 2

### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О.М., Котляр Л.М. *Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости* // Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – 108 с.
2. Седыкин Ф.В., Орлов Б.П., Матасов Ф.В., Соколов В.М. *К вопросу о взаимосвязи между поляризационными явлениями и анодным выходом по току* // Технология машиностроения: электрохимические и электрофизические методы обработки металлов. – Тула: Тул. политех. ин-т, 1976. – С. 3–8.